

2. Suites réelles

Introduction

Une suite réelle est une liste infinie de nombres

réels : $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$
↑ ↑ ↑
premier terme / deuxième terme terme général
indice 1 indice 2 indice n

Définition formel : Une suite réelle est une fonction

$$a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a(n) = a_n$$

On écrit $(a)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou simplement $(a)_n$ pour la suite.

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- formule explicite de a_n , par exemple

$$a_n = n ; (1; 2; 3; 4; \dots)$$

$$a_n = \frac{1}{n} ; (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots)$$

$$a_n = n^2 ; (1; 4; 9; 16; \dots)$$

$$a_n = 42 ; (42; 42; 42; \dots) \text{ (suite constante)}$$

$$a_n = (-1)^n ; (-1; 1; -1; 1; -1; \dots)$$

- de manière descriptive par exemple

$a_n = n$ -ième chiffre du développement décimal de π ; $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, \dots)$

- Une relation de récurrence par exemple

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \text{ et } a_1 = \frac{3}{2}$$

$$(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots)$$

↳ Hypothèse : $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ (On va le montrer plus tard)

Trouver le terme général : exemples simples

$$-(2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots)$$

$$\begin{array}{c} \text{+3} \quad \text{+3} \quad \text{+3} \end{array}$$

L'écart est constant

$$a_n = 3n - 1 \quad \text{linéaire}$$

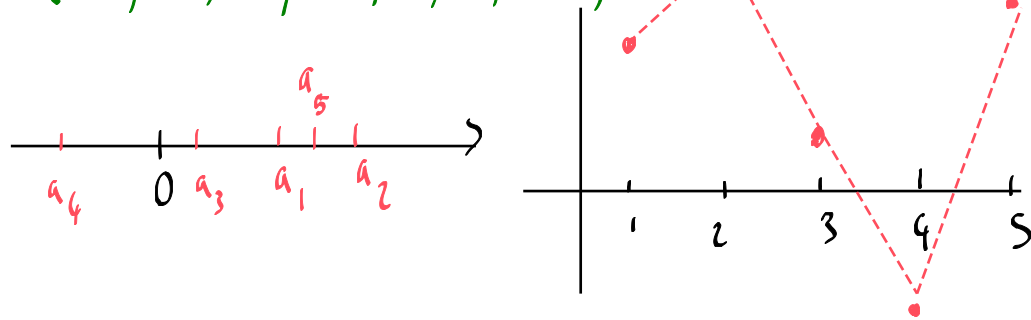
$$-(3, 9, 19, 33, 51, \dots)$$

$$\begin{array}{c} \text{+6} \quad \text{+10} \quad \text{+14} \quad \text{+18} \\ \text{+4} \quad \text{+4} \quad \text{+4} \end{array}$$

L'écart entre les écarts est constant

$$a_n = \frac{4}{2} n^2 + 1 = 2n^2 + 1 \quad \text{quadratique}$$

On peut représenter les suites graphiquement :
 $(3, 5, 1, -2, 5, 4, \dots)$



Suites majorées / minorées

Definitions

- Une suite (a_n) est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
↖ majorant

- Une suite (a_n) est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
↖ minorant

- (a_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée

Rem (a_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists C > 0$ tel que $|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Rem Les majorants / minorants ne sont pas uniques!

Exemples

- $a_n = \frac{1}{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1
 $\hookrightarrow$ suite bornée

- $a_n = n^2$ est minorée par 0, mais pas majorée car $\nexists M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $a_n = (-1)^n \cdot n$ est ni minorée, ni majorée

- $a_n = \underbrace{\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n-3 \text{ termes}}$

$\hookrightarrow a_n$ est minorée par 0 et chaque terme

$\hookrightarrow$ majorée? est $\leq \frac{1}{n}$

$$a_n \leq (n-3) \cdot \frac{1}{n} \leftarrow$$

$$\leq 1$$

$\Rightarrow$ majorée par 1.

Monotonie

Soit (a_n) une suite.

- (a_n) est **croissante** si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) est **strictement croissante** si $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) est **décroissante** si $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) est **strictement décroissante** si $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante
- (a_n) est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples

- $a_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante car $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$
- $a_n = (-1)^n$ est ni croissante, ni décroissante
- $a_n = \frac{3n+4}{n+1}$? On compare $a_n - a_{n+1}$ à 0

$$\frac{3n+4}{n+1} - \frac{3(n+1)+4}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

→ strictement décroissante!

Preuve par récurrence

Problème motivationnelle: montrer que

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)$$

En général,

$$\sum_{k=i}^j a_k = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{j-1} + a_j$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Pour montrer $(*)$, on considère une propriété P_n

P_n est vraie si $(*)$ est vraie quand $n = a$

Il faut donc montrer que P_n est vraie pour tout a

Strategy par récurrence:

- Initialisation: montrer que P_0 est vraie
- Hérité: montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$\Rightarrow P_n$ est vraie pour tout n !

Donc, pour notre exemple :

Initialisation :

$$P_0: \sum_{k=0}^0 k = \frac{0(0+1)}{2}$$

$$0 = 0$$



Hypothèse de
réurrence
↓

Hérédité: On suppose $P_n: \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

On doit montrer $P_{n+1}: \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\text{Hors, } \sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow$$

Hyp. de Rec.
↓
On a montré
 $P_{n+1}!$ ✓

$\Rightarrow P_n$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.